

Ausgleichsrechnung – Modellbildung, Auswertung, Qualitätsbeurteilung

Frank Neitzel
i3mainz – Institut für Raumbezogene
Informations- und Messtechnik
Fachhochschule Mainz
Lucy-Hillebrand-Str. 2
55128 Mainz
neitzel@geoinform.fh-mainz.de

1 Einleitung

Geodätische Arbeiten verfolgen das generelle Ziel, Teile der geometrisch-physikalischen Realität auf der Grundlage von Messungen zu beschreiben. Da es jedoch in fast allen Fällen nicht möglich ist, alle Parameter, die die geometrisch-physikalischen Verhältnisse beschreiben, direkt zu messen, muss ein funktionales Modell aufgestellt werden. Mit diesem soll die Verknüpfung des Vektors der Messungen \mathbf{L} mit dem gesuchten Parametervektor \mathbf{u} in der Form

$$\mathbf{L} = \mathbf{F}(\mathbf{u}) \quad (1)$$

erfolgen. In dieser Darstellung repräsentiert \mathbf{L} den Vektor fehlerfreier Messwerte, $\mathbf{F}(\mathbf{u})$ ein funktionales Modell, das den Zusammenhang zwischen den Messwerten und den gesuchten Größen vollständig beschreibt.

Da fehlerfreie Messungen aufgrund technisch-mechanischer Unzulänglichkeiten und der Unvollkommenheit der menschlichen Sinne nicht möglich sind, erhält man anstelle des Vektors \mathbf{L} in der Realität den Vektor \mathbf{l} , der zufällige Abweichungen¹ $\boldsymbol{\varepsilon}_z$ enthält und grobe Fehler $\boldsymbol{\varepsilon}_g$ sowie systematische Abweichungen¹ $\boldsymbol{\varepsilon}_s$ enthalten kann. Zudem ist es in der Realität nicht möglich, alle Modelleinflüsse vollständig zu erfassen.

¹ Zufällige bzw. systematische Abweichungen, siehe DIN 1319, Teil 3, wurden früher als zufällige Fehler bzw. systematische Fehler bezeichnet.

Es können jeweils nur die Haupteinflüsse mit Hilfe eines Modells $f(\mathbf{x})$ erfasst werden. Somit erhält man anstelle von (1) eine Gleichung in der Form

$$\mathbf{l} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\varepsilon}_s + \boldsymbol{\varepsilon}_z + \boldsymbol{\varepsilon}_g \quad . \quad (2)$$

Die erforderlichen Verarbeitungsschritte, damit \mathbf{l} eine möglichst zutreffende quantitative Aussage über die Messgrößen liefert, werden in Abschnitt 2 aufgezeigt. Die Möglichkeiten einer möglichst realitätsnahen Modellbildung werden in Abschnitt 3 vorgestellt. Die Lösung überbestimmter Problemstellungen mit Hilfe der Ausgleichsrechnung wird in Abschnitt 4 gezeigt. In diesem Abschnitt werden auch die Auswertemodelle innerhalb der Methode der kleinsten Quadrate vorgestellt und das Konzept der robusten Parameterschätzung wird erläutert. Daran anschließend folgt eine Einführung in die Anwendung statistischer Testverfahren. Die verschiedenen Kenngrößen zur Qualitätsbeurteilung von Ausgleichsergebnissen werden in Abschnitt 6 vorgestellt.

2 Messwerte

Das grundsätzliche Ziel von Messungen ist die quantitative Aussage über eine Messgröße, z.B. die Länge der Schrägstrecke zwischen zwei Punkten. Diese quantitative Größe wird als *Messwert* bezeichnet. In vielen Fällen repräsentieren die Geräteablesungen jedoch nicht den gesuchten Messwert, da noch folgende Einflüsse zu berücksichtigen sind:

- Einflüsse aus dem Messsystem, z.B. Instrumentenmaßstab und Additionskonstante bei der elektrooptischen Entfernungsmessung.
- Einflüsse aus der Umwelt, z.B. Laufzeitverzögerungen in der Atmosphäre bei der elektrooptischen Entfernungsmessung.

Für die Einflüsse aus dem Messsystem sind in regelmäßigen Abständen Kalibrierparameter zu bestimmen, mit denen die Rohdaten korrigiert werden können. Für einen automatisierten Messwertfluss empfiehlt es sich, diese Kalibrierparameter am Instrument, z.B. Tachymeter, einzugeben, so dass diese sofort angebracht werden können. Einflüsse aus der Umwelt sind durch Messung zusätzlicher Größen wie Luftdruck und Temperatur zu erfassen. Auch hier empfiehlt es sich, diese Werte direkt am Gerät einzugeben, damit die Korrekturwerte sofort angebracht werden können. Durch diese *Korrekturen* erhält man aus der Geräteablesung einen *Messwert*, der im Rahmen der Genauigkeit des eingesetzten Instrumentariums eine quantitative Aussage über eine Messgröße liefert.

Die weitere Verarbeitung der Messwerte erfolgt im Hinblick auf die *Rechenfläche*, in der die Auswertung letztendlich erfolgen soll. Zur Unterscheidung zu den zuvor beschriebenen Korrekturen wird dieser Verarbeitungsschritt als *Reduktion* bezeichnet. Da die Auswertung in fast allen Fällen in einem ebenen Koordinatensystem, Gauß-Krüger- oder UTM-Koordinatensystem, stattfindet, sind die Messwerte zunächst in eine lokale Horizontalebene zu reduzieren. Für Horizontalrichtungen entfällt dieser Schritt, da sie sich bereits auf eine Horizontalebene beziehen, die Streckenmessungen sind jedoch mit Hilfe von Zenitwinkelmessungen jeweils in eine Horizontalebene auf Höhe der Instrumentenkippachse zu reduzieren. Von dort sind die Werte mit Hilfe geometrischer Reduktionen auf den Horizont des Bezugsellipsoids zu beziehen. Danach werden die Strecken mit Hilfe eines Maßstabsfaktors in die Gauß-Krüger- oder UTM-Ebene übertragen.

Nach diesen Verarbeitungsschritten steht der Vektor **I** der auf die Rechenfläche reduzierten Messwerte zur Verfügung. Dieser Vektor wird im Allgemeinen, und somit auch in diesem Beitrag, als *Beobachtungsvektor* und seine Komponenten als Beobachtungen bezeichnet. Diese Bezeichnung ist jedoch nicht ganz sachgerecht, da sie die Verwendung originärer Messwerte impliziert, was jedoch nur für einen Teil der Messwerte, z.B. Richtungsmessungen, zutreffend ist.

Bezüglich des Fehlerhaushaltes des Beobachtungsvektors ist folgendes festzustellen:

- Der Vektor **I** ist mit zufälligen Abweichungen ϵ_z behaftet, da es aufgrund technisch-mechanischer Unzulänglichkeiten und der Unvollkommenheit der menschlichen Sinne keine fehlerfreien Messwerte geben kann.
- Der Vektor **I** kann mit groben Fehlern ϵ_g behaftet sein, die z.B. durch Punktverwechslungen entstanden sind.
- Der Vektor **I** kann mit systematischen Abweichungen ϵ_s behaftet sein, die z.B. durch Nichtberücksichtigung von Kalibrierparametern verursacht werden.

3 Modellbildung

3.1 Das funktionale Modell

Nach der Bereitstellung des Beobachtungsvektors **I** besteht die Aufgabe, ein funktionales Modell aufzustellen, das die gesuchten Parameter mit den Messwerten **I** verknüpft. Da eine vollständige Modellbildung z.B. aufgrund von sys-

tematischen Einflüssen, deren Existenz oder deren funktionales Gesetz nicht bekannt ist, nicht möglich ist, besteht die Aufgabe ein bestmögliches funktionales Modell $f(\mathbf{x})$ aufzustellen. Entscheidenden Einfluss auf die Art und Anzahl der Parameter im Vektor \mathbf{x} - die Modellbildungstiefe - hat zum einen der Grad der Berücksichtigung von Korrekturen und Reduktionen im Vektor \mathbf{l} und zum anderen die Auswahl der Rechenfläche für die Auswertung. Die Auswahl der Rechenfläche wird in fast allen Fällen von den gesuchten Parametern bestimmt. Wird z.B. ein Lagenetz zur Bestimmung von UTM-Koordinaten gemessen, wird die Auswertung in der UTM-Koordinatenebene stattfinden. Wurden im Vektor \mathbf{l} alle erforderlichen Korrekturen und Reduktionen angebracht, so dass sich die Beobachtungen auf die UTM-Koordinatenebene beziehen, kann ein funktionales Modell mit den Parametern Y_i, X_i , (Koordinatenunbekannte) und o_i (Orientierungsunbekannte) als Komponenten des Vektors \mathbf{x} aufgestellt werden.

Wurde die UTM-Projektionsverzerrung bei der Aufstellung des Vektors \mathbf{l} nicht berücksichtigt, so ist es auch möglich, diese auf Seiten des funktionalen Modells durch Einführung eines Maßstabs als festen Parameter zu berücksichtigen. Weiterhin besteht die Möglichkeit, z.B. Kalibrierparameter, die bei der Aufstellung des Vektors \mathbf{l} nicht berücksichtigt wurden, als unbekannte Parameter auf Seiten des funktionalen Modells zu berücksichtigen. Sollen z.B. Instrumentenmaßstab und Additionskonstante bei der elektrooptischen Entfernungsmessung als Unbekannte eingeführt werden, ergibt sich eine Streckenbeobachtung mit

$$l_i = f_i(Y_k, X_k, Y_j, X_j, a, m) \quad (3)$$

als Funktion der Koordinaten des Standpunktes j , der Koordinaten des Zielpunktes k , der Additionskonstanten a sowie des Instrumentenmaßstabs m . Die Einführung von Kalibrierparametern als Unbekannte im funktionalen Modell findet z.B. bei der Bestimmung von Kalibrierparametern für Amateurkameras in der Nahbereichsphotogrammetrie Anwendung, was als „calibration-on-the-job“ bezeichnet wird.

Grundsätzlich ist bei der Aufstellung des funktionalen Modells zu beachten, dass sich der Beobachtungsvektor \mathbf{l} und das funktionale Modell $f(\mathbf{x})$ auf eine gemeinsame Rechenfläche beziehen und dass alle Korrekturen und Reduktionen entweder auf der Seite der Beobachtungen oder auf der Seite des funktionalen Modells als feste oder unbekannte Parameter berücksichtigt werden. Eine unvollständige funktionale Modellbildung führt unweigerlich zu einer systematischen Verfälschung der gesuchten Parameter.

3.2 Das stochastische Modell

Die gesuchten Parameter \mathbf{x} sowie deren Genauigkeiten werden durch die Genauigkeiten der einzelnen Beobachtungen l_i direkt beeinflusst. Daher ist es erforderlich, dass für die Beobachtungen möglichst zuverlässige Genauigkeitsangaben in Form von Standardabweichungen vorliegen. In der Regel sind die Herstellerangaben für das verwendete Instrumentarium zu verwenden, möglich ist auch, Werte zu verwenden, die aus der Erfahrung über einen längeren Zeitraum mit dem Messsystem gesammelt wurden. Die Genauigkeitsangaben setzen sich in den meisten Fällen aus einem konstanten und einem entfernungsabhängigen Anteil zusammen. Die Genauigkeit der Richtungsmessung kann mit

$$\sigma_r = \sqrt{B_0^2 + \left(\frac{B_1}{s} \cdot \rho\right)^2} \quad (4)$$

angegeben werden, wobei B_0 die innere Richtungsmessgenauigkeit und B_1 den entfernungsabhängigen Anteil eines vermarktungsspezifischen Zentrier- bzw. Zieleinstellfehlers in Bezug zur Zielweite s repräsentiert. Die Genauigkeit von Streckenmessungen kann mit

$$\sigma_s = A_1 + A_2 \cdot s \quad (5)$$

angegeben werden, wobei A_1 den konstanten und A_2 den entfernungsabhängigen Anteil der Streckenmessgenauigkeit repräsentiert. Fasst man die Genauigkeitsangaben σ_i in einer Matrix zusammen, erhält man mit

$$\Sigma_{ll} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & & & 0 \\ & \sigma_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \sigma_n^2 \end{bmatrix} \quad (6)$$

die Varianz-Kovarianzmatrix der Beobachtungen, wobei mit n die Anzahl der Beobachtungen bezeichnet ist. Die Kovarianzen (Nebendiagonalelemente) werden in vielen Anwendungen zu null gesetzt, da sich die eventuell bestehenden Korrelationen zwischen den Beobachtungen nicht erfassen lassen.

4 Ausgleichsrechnung

4.1 Einführung

In den Ausführungen der vorangegangenen Abschnitte ist bisher keine Aussage zur Anzahl der Beobachtungen n im Verhältnis zur Anzahl der gesuchten Parameter u getroffen worden. Das liegt darin begründet, dass die Konzepte zur Bereitstellung des Beobachtungsvektors und zur Modellbildung sowohl für Minimalkonfigurationen mit $m = u$ als auch für überbestimmte Konfigurationen mit $m > u$ gelten.

Mit Hilfe einer Minimalkonfiguration können die gesuchten Parameter aus mathematischer Sicht eindeutig bestimmt werden, die Angabe von Standardabweichungen für die gesuchten Parameter ist mit Hilfe des Varianz-Fortpflanzungsgesetzes möglich. Allerdings hat dieser Fall den entscheidenden Nachteil, dass Beobachtungsfehler nicht erkannt werden können und sich somit auf die gesuchten Parameter durchschlagen. Die Zuverlässigkeit des Ergebnisses aus einer Minimalkonfiguration ist daher gleich Null!

Aus diesem Grund soll nun der Fall betrachtet werden, dass mit $n > u$ mehr Beobachtungen als Unbekannte vorliegen. Man spricht dann von einem Ausgleichsproblem. Nehmen wir zunächst an, dass die Messwerte lediglich mit zufälligen Abweichungen behaftet sind. Dann können mit

$$\mathbf{v} = -\boldsymbol{\varepsilon}_z \quad (7)$$

die so genannten Verbesserungen eingeführt werden, womit (2) übergeht in

$$\mathbf{l} + \mathbf{v} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (8)$$

Zur Lösung des Ausgleichsproblems bedarf es für eine Funktion dieser Verbesserungen einer zusätzlichen Forderung. Die am häufigsten aufgestellte Forderung ist, dass die Quadratsumme der gewichteten Verbesserungen mit

$$\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} \rightarrow \min \quad (9)$$

zum Minimum wird. Mit \mathbf{P} ist die Gewichtsmatrix

$$\mathbf{Q}_{ll} = \frac{1}{\sigma_0^2} \boldsymbol{\Sigma}_{ll}, \quad \mathbf{P} = \mathbf{Q}_{ll}^{-1} \quad (10)$$

bezeichnet, die man aus (6) erhält, wobei mit σ_0^2 der (unbekannte) theoretische Varianzfaktor bezeichnet ist, der vor der Ausgleichung (a priori) oftmals mit $\sigma_0^2 = 1$ gewählt wird. Eine Ausgleichung mit der Zielfunktion (9) wird als *Methode der kleinsten Quadrate* bezeichnet, die im folgenden Abschnitt näher erläutert wird. Ausgleichungsmethoden mit alternativen Zielfunktionen werden in Abschnitt 4.3 vorgestellt.

4.2 Die Methode der kleinsten Quadrate

4.2.1 Allgemeines

Die Methode der kleinsten Quadrate wurde etwa zeitgleich von C.F. GAUß und A.M. LEGENDRE zu Beginn des 19. Jahrhunderts entdeckt und zunächst auf astronomische Problemstellungen angewendet. Einen interessanten Einblick in die Entstehungsgeschichte bieten Briefwechsel von C.F. GAUß, die unter „Zur Geschichte der Entdeckung der Methode der kleinsten Quadrate“ in (Gauß 1900, S. 136-141) dokumentiert sind und in denen C.F. GAUß beschreibt, dass er diese Methode seit 1794 vielfach angewendet hat. Eine Diskussion über die Begründung der Methode der kleinsten Quadrate ist ebenfalls unter „Kritische Bemerkungen zur Methode der kleinsten Quadrate“ anhand von Briefwechseln in (Gauß 1900, S. 142-148) dokumentiert. Eine Zusammenstellung von Abhandlungen zur Methode der kleinsten Quadrate ist in (Gauß 1887) zu finden.

Als weiteres grundlegendes Werk ist (Helmert 1924) anzusehen, worin neben Anmerkungen zur geschichtlichen Entwicklung unter anderem die Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen beschrieben wird. Eine Zusammenfassung der historischen Entwicklung und der Gaußschen Begründungen für die Methode der kleinsten Quadrate ist in (Caspary 1988) zu finden. Zudem werden kritische Anmerkungen zur Anwendung dieser Methode aufgeführt, die jedem Anwender bewusst sein sollten.

Der Durchbruch dieser Methode kam mit den Anwendungen in der Landesvermessung ab ca. 1850. Heutzutage ist die Methode der kleinsten Quadrate die Standard-Auswertemethode für nahezu alle Fragestellungen in der Geodäsie und Geoinformationstechnik. Umfangreiche Softwarepakete erleichtern die Anwendung, so dass diese Methode (leider) oftmals als Black-Box-Verfahren angewendet wird. Auch in der DIN 1319, Teil 4 ist die Anwendung dieses Schätzprinzips bei überbestimmten Problemstellungen verankert.

Neben einer rein geometrischen Interpretation der Ausgleichung nach kleinsten Quadraten, nämlich der Minimierung einer Norm, lässt sich auch eine statistische Begründung finden (Maximum-Likelihood-Schätzung). Dies setzt aber voraus, dass es sich bei den Beobachtungsfehlern um normalverteilte Zufallsgrößen handelt. In (Helmert 1924, S. 115) wird dazu ausgeführt: „Lässt sich nachweisen, dass das Fehlervorkommen der Gaußschen Form (Anm.: Normalverteilung) [...] entspricht, so erhalten wir [...] durch die Methode der kleinsten Quadrate die wahrscheinlichsten Werte der Unbekannten. Zugleich besitzen diese Werte die größten Gewichte bzw. die kleinsten mittleren Fehler. Entspricht aber das Fehlervorkommen dem Gaußschen Fehlergesetze nicht, so haben wir nicht mehr die wahrscheinlichsten Werte der Unbekannten, dagegen in ihrer Bestimmung immer noch die kleinsten mittleren Fehler [...].“ Diesen warnenden Hinweis kann man an mehreren Stellen in der Literatur finden, so führt z.B. (Linnik 1961, S. 284) aus, dass die Optimaleigenschaften der Methode der kleinsten Quadrate auf das engste mit der Normalverteilung des Fehlervektors der Beobachtungen verbunden sind.

Es ist aber unbedingt zu beachten, dass Beobachtungsfehler die Forderung nach strenger Normalverteilung nicht erfüllen und auch nicht erfüllen können; sie sind bestenfalls näherungsweise normalverteilt, siehe hierzu z.B. (Caspary 1988) oder (Petrovic 2003, S. 12). Es gibt nämlich keine Messungen mit einer unbeschränkten Auflösung im Kleinen, weiterhin ist ein wahrer Fehler von 10 km bei der Messung einer 10 m langen Strecke statistisch zwar sehr unwahrscheinlich, aber dennoch möglich. Bei tatsächlichen Messungen kann aber eine derartige zufällige Abweichung überhaupt nicht vorkommen.

Wird den Beobachtungsfehlern dennoch eine Normalverteilung zugesprochen, handelt es sich lediglich um eine Annahme, die der tatsächlichen Natur der Messungen mal mehr und mal weniger gut entsprechen kann. Besitzt die Verteilungsfunktion lediglich die Eigenschaft der Symmetrie, werden die Ergebnisse einer Ausgleichung nach kleinsten Quadraten oftmals die „plausibelsten“ oder „günstigsten“ genannt (siehe z.B. Welsch et al. 2000). Doch gerade der Begriff „plausibel“ sollte mit großer Vorsicht verwendet werden, da mit ihm oftmals eine statistische Interpretierbarkeit der Ergebnisse verbunden wird, die aber nur für normalverteilte Beobachtungsfehler sachgemäß ist. Für den Fall, dass

- die Messfehler nicht normalverteilt sind, oder
- die Messwerte mit groben Fehlern behaftet sind, oder
- die Modellbildung unvollständig ist (systematische Abweichungen),

liefert die Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate zwar immer noch ein Ergebnis, das die Forderung (9) erfüllt (also im Sinne der Minimierung einer Norm ein „günstiges“ Ergebnis liefert), eine statistische Interpretation dieser Ergebnisse ist jedoch nicht mehr möglich.

Die Tatsache, dass die Optimaleigenschaften der Methode der kleinsten Quadrate auf das engste mit der Normalverteilung des Fehlervektors $\boldsymbol{\varepsilon}_z$ der Beobachtungen verbunden sind, hat direkte Auswirkung auf die Erkennbarkeit von groben Fehlern und systematischen Abweichungen. Diese lassen sich nur dadurch erkennen, dass die Verbesserungen nach der Ausgleichung ein anderes Verhalten aufweisen, als sich in Abwesenheit dieser Fehler ergeben würde. Die Erkennung fehlerhafter Beobachtungen kann gelingen, wenn nur ein geringer Teil der Eingangsdaten verfälscht ist. Aufgrund der bekannten „Verschmierungseffekte“ (Einfluss grober Fehler auf Nachbarbeobachtungen) bei der Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate, stößt dieses Verfahren beim Vorliegen mehrerer Ausreißer schnell an seine Grenzen.

Der prozentuale Anteil fehlerhafter Daten an den Gesamtdaten, bei dem eine Ausgleichungsmethode noch brauchbare Ergebnisse liefert, wird als *Bruchpunkt* bezeichnet. Bei der Methode der kleinsten Quadrate beträgt dieser lediglich ca. 3% bis 5%, siehe (Niemeier 2008, S. 218). Ist ein größerer Prozentsatz fehlerhafter Beobachtungen in den Daten zu befürchten, ist ein Preprocessing mit einer *anderen Zielfunktion* ratsam. Hierzu zählt die Anwendung der robusten Ausgleichungsmethoden, die in Abschnitt 4.3 vorgestellt werden.

4.2.2 Ausgleichungsmodelle

Hat man sich für die Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate entschieden, stellt sich als nächstes die Frage nach einem geeigneten Ausgleichungsmodell, um die Zahlenergebnisse für die gesuchten Parameter zu berechnen. Die Wahl hängt von der Art des funktionalen Modells ab, mit dem die Beobachtungen und die gesuchten Parameter miteinander verknüpft sind.

4.2.2.1 Der Allgemeinfeld der Ausgleichungsrechnung

In (8) wurde davon ausgegangen, dass sich je eine Beobachtung als Funktion der gesuchten Parameter darstellen lässt. Treten in den funktionalen Beziehungen gleichzeitig mehrere Beobachtungen und Unbekannte auf, ergibt sich mit

$$\psi_i(\mathbf{v}, \mathbf{x}) = h_i(\mathbf{1} + \mathbf{v}, \mathbf{x}) = 0 \quad (11)$$

eine implizite Form der funktionalen Beziehungen, die als *bedingte Beobachtungen mit Unbekannten* (Helmert 1924, S. 285 ff.) den *Allgemeinfall der Ausgleichsrechnung* darstellt. Dieser Fall tritt z.B. bei der Berechnung einer ausgleichenden Geraden auf, bei der sowohl die Werte y_i als auch die Werte x_i als fehlerbehaftete Beobachtungen eingeführt werden.

Dieser Allgemeinfall wird als *Gauß-Helmert-Modell* (GH-Modell) bezeichnet, das mit Hilfe einer sachgerechten Linearisierung und Iteration gelöst werden kann. Sachgerecht bedeutet in diesem Fall, dass die Linearisierung der Bedingungsgleichungen korrekt und somit sowohl an der Stelle der Näherungswerte \mathbf{x}^0 für die Unbekannten als auch an der Stelle der Näherungswerte \mathbf{v}^0 für die Verbesserungen erfolgt (alternativ kann die Linearisierung an der Stelle $\mathbf{1} + \mathbf{v}^0$ vorgenommen werden). Obwohl auf die Notwendigkeit dieser sachgerechten Linearisierung seit den 1970er Jahren in mehreren Publikationen hingewiesen wurde, siehe z.B. (Pope 1972) findet man heutzutage in allen Lehrbüchern lediglich eine näherungsweise Auswertung des GH-Modells, die einer Linearisierung an der Stelle $\mathbf{v}^0 = \mathbf{0}$ entspricht.

Eine derartige Lösung kann insbesondere bei großen Residuen im Verhältnis zu den Beobachtungen zu einer unbrauchbaren Lösung führen. Lenzmann und Lenzmann (2004) greifen diese Problemstellung erneut auf und präsentieren ebenfalls eine strenge Auswertung des GH-Modells, wobei sie sehr anschaulich zeigen, unter welchen Vernachlässigungen sich die in der Literatur üblicherweise verwendeten Formeln ergeben. Die nachfolgend aufgeführte strenge Auswertung des GH-Modells basiert auf der Darstellung in (Lenzmann und Lenzmann 2004).

Durch Einführung geeigneter Näherungswerte \mathbf{v}^0 und \mathbf{x}^0 können für (11) die linearisierten Bedingungsgleichungen

$$\mathbf{f}(\mathbf{v}, \mathbf{x}) = \mathbf{B}(\mathbf{v} - \mathbf{v}^0) + \mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0) + \boldsymbol{\psi}(\mathbf{v}^0, \mathbf{x}^0) = \mathbf{0} \quad (12)$$

angegeben werden, mit den Matrizen der partiellen Ableitungen

$$\mathbf{B}(\mathbf{v}, \mathbf{x}) = \left. \frac{\partial \boldsymbol{\psi}(\mathbf{v}, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{v}} \right|_{\mathbf{v}^0, \mathbf{x}^0} \quad \text{und} \quad \mathbf{A}(\mathbf{v}, \mathbf{x}) = \left. \frac{\partial \boldsymbol{\psi}(\mathbf{v}, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{v}^0, \mathbf{x}^0} \quad (13)$$

die jeweils an der Stelle der Näherungswerte \mathbf{v}^0 und \mathbf{x}^0 zu bilden sind. Mit dem Widerspruchsvektor

$$\mathbf{w} = -\mathbf{B}\mathbf{v}^0 + \boldsymbol{\psi}(\mathbf{v}^0, \mathbf{x}^0) \quad (14)$$

erhält man die Lösung für die Unbekannten aus dem Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} \mathbf{k} \\ \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}^0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{B}\mathbf{Q}_{ll}\mathbf{B}^T & \mathbf{A} \\ \mathbf{A}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{11} & \mathbf{Q}_{12} \\ \mathbf{Q}_{21} & \mathbf{Q}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (15)$$

die Verbesserungen erhält man aus

$$\mathbf{v} = \mathbf{Q}_{ll}\mathbf{B}^T\mathbf{k} \quad (16)$$

Die Lösungen \mathbf{v} , $\hat{\mathbf{x}}$ sind solange als neue Näherungswerte \mathbf{v}^0 , \mathbf{x}^0 einzusetzen, bis ein sinnvoll gewähltes Abbruchkriterium erreicht ist. Den Schätzwert für den Varianzfaktor erhält man aus

$$s_0^2 = \frac{\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}}{f}, \quad (17)$$

wobei mit f der Freiheitsgrad (Redundanz) des Ausgleichungsproblems bezeichnet ist. Die Kofaktorenmatrix der ausgeglichenen Parameter erhält man aus

$$\mathbf{Q}_{xx} = -\mathbf{Q}_{22}, \quad (18)$$

die Kofaktorenmatrix der Verbesserungen der Beobachtungen ergibt sich zu

$$\mathbf{Q}_{vv} = \mathbf{Q}_{ll}\mathbf{B}^T\mathbf{Q}_{11}\mathbf{B}\mathbf{Q}_{ll} \quad (19)$$

Anzumerken ist, dass Ausgleichungsprobleme mit funktionalen Modellen in der Form (11) in der Literatur zur mathematischen Statistik seit ca. 1980 als so genannte *Total Least-Squares* Probleme behandelt werden, für die spezielle Lösungsalgorithmen zu entwickeln sind, siehe z.B. (Golub und van Loan 1980). Seit einiger Zeit hat die Total Least-Squares Ausgleichung auch Einzug in die geodätische Literatur gehalten, siehe z.B. Schaffrin (2007). Die Tatsache, dass sich Total Least-Squares Problemstellungen problemlos durch eine *sachgerechte* Auswertung des GH-Modells lösen lassen, wird z.B. in (Neitzel und Petrovic 2008) am Beispiel der ausgleichenden Geraden gezeigt.

Aus dem in diesem Abschnitt vorgestellten Allgemeinfeld der Ausgleichungsrechnung lassen sich alle weiteren Ausgleichungsmodelle ableiten.

4.2.2.2 Ausgleichung nach bedingten Beobachtungen

Treten in (11) keine Parameter \mathbf{x} auf, resultiert aus dem GH-Modell der Fall der *Ausgleichung nach bedingten Beobachtungen*. Die strenge Lösung ist ebenfalls in (Lenzmann und Lenzmann 2004) dargestellt. Die Verbesserungen und der Schätzwert für den Varianzfaktor ergeben sich wie in (16) und (17), die Kofaktorenmatrix der Verbesserungen erhält man nach (Niemeier 2008, S. 184) aus

$$\mathbf{Q}_{vv} = \mathbf{Q}_{ll} \mathbf{B}^T (\mathbf{B} \mathbf{Q}_{ll} \mathbf{B}^T)^{-1} \mathbf{B} \mathbf{Q}_{ll} . \quad (20)$$

4.2.2.3 Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen

Treten in (11) nur Gleichungen auf, in denen jeweils nur eine einzelne Beobachtung l_i enthalten ist, liegt der Fall der *Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen* vor, der auch als *Gauß-Markov-Modell* bezeichnet wird. Aus

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{l} \quad (21)$$

erhält man die Lösung für die Unbekannten

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{l} = \mathbf{Q}_{xx} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{l} . \quad (22)$$

Die Verbesserungen

$$\mathbf{v} = \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{l} \quad (23)$$

ergeben sich zu

$$\mathbf{v} = \mathbf{A} \mathbf{Q}_{xx} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{l} - \mathbf{l} = (\mathbf{A} \mathbf{Q}_{xx} \mathbf{A}^T \mathbf{P} - \mathbf{E}) \mathbf{l} . \quad (24)$$

Die Berechnung der Kofaktorenmatrix der Verbesserungen erfolgt mit Hilfe des Varianz-Fortpflanzungsgesetzes und liefert

$$\mathbf{Q}_{vv} = (\mathbf{A} \mathbf{Q}_{xx} \mathbf{A}^T \mathbf{P} - \mathbf{E}) \mathbf{Q}_{ll} (\mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{Q}_{xx} \mathbf{A}^T - \mathbf{E}) , \quad (25)$$

was sich zu

$$\mathbf{Q}_{vv} = \mathbf{Q}_{ll} - \mathbf{A} \mathbf{Q}_{xx} \mathbf{A}^T \quad (26)$$

zusammenfassen lässt. Eine ausführliche Herleitung der Gebrauchsformeln ist z.B. in (Niemeier 2008, S. 132 ff.) zu finden.

4.3 Alternative Ausgleichungsmethoden

Sind die Voraussetzungen für eine sachgerechte Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate (vollständiges funktionales Modell, normalverteilte Beobachtungsfehler) nicht erfüllt, liefert die Ausgleichung unrealistische Modellparameter. Zudem sind, aufgrund der bekannten „Verschmierungseffekte“, fehlende Modellanteile und Ausreißer in den Beobachtungen oftmals nicht mehr anhand der Residuen zu identifizieren.

Mit der Ausgleichung beim Vorliegen von Modell- und Beobachtungsfehlern unbekannter Art beschäftigen sich die so genannten robusten Methoden, deren Entwicklung mit den Arbeiten von HUBER und HAMPEL in den 1960er Jahren begann. Ein Überblick über die Entwicklung dieser Methoden ist in (Hampel 2001) zu finden. Seit den 1970er Jahren haben die robusten Methoden auch Einzug in die geodätische Anwendung gefunden, siehe z.B. (Carosio 1979). Einen aktuellen Überblick bieten (Niemeier 2008) und (Jäger et al. 2005). In (Petrovic 2003) wird mit der „Ausgleichung nach maximaler Korrelation“ eine rein geometrisch begründete Ausgleichungsmethode vorgestellt, die zur Parameterschätzung für unvollständige Modelle angewendet werden kann.

Zur Beurteilung der Leistungsfähigkeit einer Ausgleichungsmethode wird deren Bruchpunkt angegeben. Der Bruchpunkt ist der Prozentsatz von fehlerhaften Daten beliebiger Größe, der erlaubt ist, bevor das Schätzverfahren falsche Werte liefert bzw. „zusammenbricht“ (Niemeier 2008, S. 218). Der Bruchpunkt für die L_1 -Schätzung mit der Zielfunktion

$$\sum_{i=1}^n |v_i| \rightarrow \min \quad (27)$$

und die LMS-Schätzung (LMS = **L**east **M**edian **S**quares) mit der Zielfunktion

$$\text{median}(v_i^2) \rightarrow \min \quad (28)$$

beträgt bis zu 50%. In (Hekimoglu und Koch 1999) wird dazu ausgeführt, dass dieser Wert die Fähigkeit einer Ausgleichungsmethode charakterisiert, mit sehr großen Ausreißern zurechtzukommen. Da diese aber in der geodätischen Praxis eher selten auftreten, wurde ein Zuverlässigkeitsmaß entwickelt, für den Fall, dass mehrere kleine Ausreißer im Datenmaterial vorhanden sind. Dieses wird definiert als „minimale mittlere Erfolgsrate“, in einem gegebenen Ausreißerintervall für eine bestimmte Anzahl von Ausreißern.

Untersucht wurden die Schätzverfahren nach HUBER, ein modifizierter M-Schätzer, die LMS-Methode, der ANDREWS-Schätzer und die L_1 -Norm-Schätzung. Für die Darstellung der Zielfunktionen sowie die detaillierten Ergebnisse der Untersuchung an Beispielen der einfachen und multiplen linearen Regression sei auf (Hekimoglu und Koch 1999) verwiesen. Als Zusammenfassung der Untersuchungen lässt sich angeben:

- Bei den alternativen Ausgleichsmethoden kann es vorkommen, dass diese Ausreißer produzieren, obwohl im Datenmaterial keine enthalten waren.
- Die Zuverlässigkeit robuster Methoden ist abhängig von der Anzahl der Unbekannten, der Anzahl und Größenordnung der Ausreißer und von der Art der Ausreißer und der Position (Geometrie) der Beobachtungen.
- Die Zuverlässigkeit robuster Methoden nimmt rapide ab, wenn die Anzahl der Unbekannten zunimmt.

Abschließend bleibt also festzustellen, dass es eine „Universalmethode“ für die Datenanalyse nicht gibt und der Erfolg einer gewählten Methode immer sehr stark von der Geometrie des jeweiligen Ausgleichsproblems abhängt. Weiterhin ist anzumerken, dass es sich insbesondere bei der L_1 - und der LMS-Schätzung um reine Diagnosewerkzeuge handelt. Daraus folgt, dass nach der Datenbereinigung eine Ausgleichung nach kleinsten Quadraten als endgültige Parameterschätzung folgen muss.

Die folgenden Abschnitte befassen sich mit der Erkennung fehlerhafter Beobachtungen innerhalb der Ausgleichung nach kleinsten Quadraten. Dazu werden an mehreren Stellen Entscheidungen mit Hilfe statistischer Tests getroffen, die daher im folgenden Abschnitt kurz erläutert werden.

5 Statistische Testverfahren

Bei allen geodätischen Aufgabenstellungen kommt der Beurteilung der Messergebnisse oder daraus abgeleiteten Größen eine zentrale Bedeutung zu. Wie diese Beurteilung, die grundsätzlich unter Berücksichtigung der Messgenauigkeit erfolgt, generell durchgeführt wird, lässt sich an folgendem Beispiel veranschaulichen. Gegeben sind zwei Messwerte x_i und x_j für dieselbe Größe (z.B. Strecke zwischen zwei Punkten). Die Annahme, dass die Abweichung $\Delta x = x_j - x_i$ lediglich auf Messungenauigkeiten beruht, wird angenommen, falls

$$|\Delta x| \leq T \cdot \sigma \quad . \quad (29)$$

In dieser Darstellung repräsentiert σ eine Genauigkeitsangabe für die Größe Δx , der Wert T stellt einen sinnvoll zu wählenden Faktor dar. Die Genauigkeitsangabe sollte auf möglichst gesicherten Erkenntnissen beruhen. Bei Streckenmessungen z.B. sollte man einen Wert wählen, der als theoretische Standardabweichung σ_s vom Gerätehersteller angegeben wird. Denkbar ist auch, die empirische Standardabweichung s_s , die aus der Erfahrung mit dem verwendeten Gerät über einen längeren Zeitraum stammt, als Grundlage zu nehmen. Entnimmt man die Fehlerschätzung einer Ausgleichung, so sollte diese einen möglichst großen Freiheitsgrad aufweisen. Auch für den Wert T besteht die Möglichkeit, diesen anhand von Erfahrungswerten abzuschätzen und das Produkt $T \cdot \sigma$ als eine Grenze für die Beurteilung der Abweichung $|\Delta x|$ aufzufassen. Ein Beispiel dafür ist die Anwendung der bekannten „ 3σ -Regel“, bei der $T = 3$ gewählt wird.

Heutzutage wird die Beurteilung von Messergebnissen i.d.R. unter Anwendung statistischer Testverfahren durchgeführt. Voraussetzung für deren Anwendung sind immer gewisse Annahmen über die Verteilung der zu testenden Größen. Derartige Tests können also nur insoweit sinnvolle Ergebnisse liefern, wie diese Annahmen auch tatsächlich gelten. Die Auswahl eines Schrankenwertes T , unterhalb dessen eine Hypothese angenommen werden kann, erfolgt durch die Festlegung einer Irrtumswahrscheinlichkeit α , die in vielen Anwendungen mit $\alpha = 5\%$ festgelegt wird.

Die Grundlagen der statistischen Testverfahren sind z.B. in (Welsch et al. 2000) und (Niemeier 2008) zu finden, so dass auf eine ausführliche Darstellung an dieser Stelle verzichtet werden kann. Der grundsätzliche Ablauf eines statistischen Tests gestaltet sich wie folgt:

1. Aufstellen der Nullhypothese H_0 , Formulierung der Alternativhypothese H_A als zweiseitige oder einseitige Fragestellung.
2. Festlegung der Irrtumswahrscheinlichkeit (Signifikanzniveau) α , bzw. der Sicherheitswahrscheinlichkeit $P = 1 - \alpha$.
3. Berechnung einer Prüfgröße.
4. Testentscheidung aufgrund des Vergleichs der Prüfgröße mit einem Schrankenwert.

Die statistischen Tests für die Anwendungsbeispiele

- a) Vergleich einer normalverteilten Größe mit ihrem gegebenen Erwartungswert,
- b) Vergleich des Erwartungswertes zweier normalverteilter Messgrößen, die das gleiche Phänomen beschreiben,

- c) Vergleich einer empirischen Standardabweichung s_0 mit der theoretischen Standardabweichung σ_0 ,
- d) Vergleich von zwei empirisch ermittelten Standardabweichungen s_{01} und s_{02} sind in Tab. 1 zusammengefasst. Die Alternativhypothese ist zunächst als zweiseitige Fragestellung, danach jeweils als einseitige Fragestellung formuliert.

Tab. 1: Zusammenstellung statistischer Testverfahren

| | Test | Null-hypothese H_0 | Alternativ-hypothese H_A | Prüfgröße | Schrankenwert | Annahme von H_0 , wenn |
|----|----------------|---|--|---|--------------------------|--|
| a) | t -Test | $E\{x\} = \mu$ | $E\{x\} \neq \mu$; $E\{x\} < \mu$, $E\{x\} > \mu$ | $T_t = \frac{ x - \mu }{s_x}$ | $t_{f, 1-\alpha}$ | $T_t \leq t_{f, 1-\alpha}$ |
| b) | t -Test | $E\{\Delta x\} =$ $E\{x_j\} - E\{x_i\} = 0$ | $E\{\Delta x\} \neq 0$; $E\{\Delta x\} < 0$, $E\{\Delta x\} > 0$ | $T_t = \frac{ \Delta x }{s_{\Delta x}}$ | $t_{f_{ges}, 1-\alpha}$ | $T_t \leq t_{f_{ges}, 1-\alpha}$ |
| c) | χ^2 -Test | $E\{s_0^2\} = \sigma_0^2$ | $E\{s_0^2\} \neq \sigma_0^2$; $E\{s_0^2\} < \sigma_0^2$, $E\{s_0^2\} > \sigma_0^2$ | $T_{\chi^2} = \frac{f \cdot s_0^2}{\sigma_0^2}$ | $\chi_{f, 1-\alpha}^2$ | $T_{\chi^2} \leq \chi_{f, 1-\alpha}^2$ |
| d) | F -Test | $E\{s_{01}^2\} =$ $E\{s_{02}^2\} = \sigma_0^2$ | $E\{s_{01}^2\} \neq E\{s_{02}^2\}$; $E\{s_{01}^2\} < E\{s_{02}^2\}$, $E\{s_{01}^2\} > E\{s_{02}^2\}$ | $T_F = \frac{s_{01}^2}{s_{02}^2}$ mit $s_{01} > s_{02}$ | $F_{f_1, f_2, 1-\alpha}$ | $T_F \leq F_{f_1, f_2, 1-\alpha}$ |

Hat man sich für die Anwendung eines statistischen Tests entschieden, stellt sich als nächstes die wichtige Frage nach der Testgüte. Statistische Tests sind nur mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit α möglich. Mit diesem Wert ist die Wahrscheinlichkeit festgelegt, mit der die Nullhypothese verworfen wird, obwohl sie richtig ist (Fehler erster Art). Am Beispiel von Deformationsuntersuchungen bedeutet dies, dass Deformationen angezeigt werden, obwohl sie nicht vorhanden sind. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Nullhypothese angenommen wird, obwohl sie falsch ist (Fehler zweiter Art), wird mit β bezeichnet. Es ist sofort einzusehen, dass das Begehen eines Fehlers zweiter Art z.B. bei Deformationsuntersuchungen schwerwiegende Folgen haben kann, denn in diesem Fall werden Deformationen nicht angezeigt, obwohl sie vorhanden sind.

Die Wahrscheinlichkeit $\gamma = 1 - \beta$, mit der die Alternativhypothese angenommen werden kann, wird als Testgüte (Trennschärfe, Macht des Tests) bezeichnet. Die Testgüte nimmt also umso mehr zu, je kleiner der Wert β wird. Eine Verkleinerung von β entspricht andererseits einer Vergrößerung von α (vgl. Welsch 1975). Zudem hängt die Wahrscheinlichkeit β von dem Nichtzentralitätsparameter λ ab. Je größer dieser Wert ist, umso weiter liegen Null- und Alternativhypothese auseinander, d.h. die Trennschärfe des Tests wird größer. Wählt man bei gleich bleibender Nichtzentralität λ einen größeren Wert für die Irrtumswahrscheinlichkeit α , so nimmt die Testgüte γ zu, siehe Abb. 1. Dieser Vorteil bedingt aber wiederum, dass die Wahrscheinlichkeit, einen Fehler erster Art zu begehen, ansteigt. Somit ist leicht einzusehen, dass die Wahl von α einen sehr sorgfältig auszuwählenden Kompromiss zwischen Irrtumswahrscheinlichkeit und Testgüte darstellt.

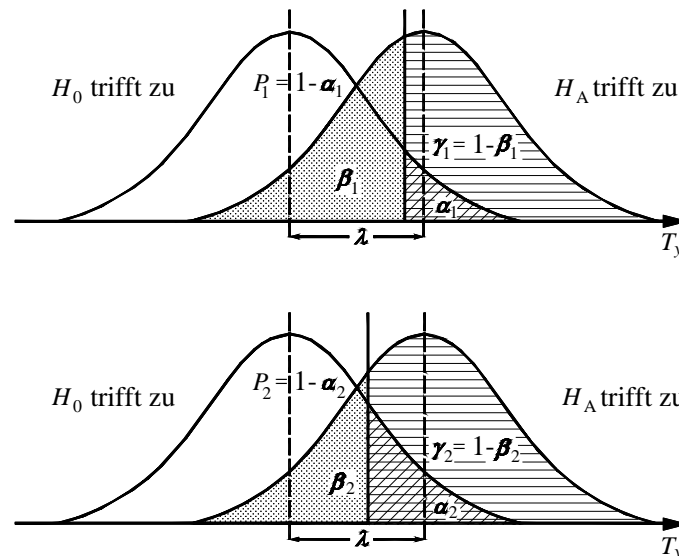


Abb. 1: Zunahme der Testgüte $\gamma_2 > \gamma_1$ wenn bei gleich bleibender Nichtzentralität λ mit $\alpha_2 > \alpha_1$ die Irrtumswahrscheinlichkeit erhöht wird

6 Qualitätsbeurteilung

Ein zentrales Anliegen des Geodäten besteht darin, Aussagen über die Qualität der Messungen und der mit Hilfe des funktionalen Modells ermittelten Parameter zu machen. Die erforderlichen Qualitätskriterien werden dabei in die Kategorien Genauigkeit und Zuverlässigkeit unterteilt, siehe z.B. (Niemeier 2008, S. 270 ff).

Die gebräuchlichen Genauigkeitsmaße werden aus der Kofaktorenmatrix der gesuchten Parameter abgeleitet. Es ist aber unbedingt zu beachten, dass die Angabe von Genauigkeitsmaßen nur dann sinnvoll ist, wenn

- die Modellbildung möglichst vollständig ist.
- Weiterhin ist von entscheidender Bedeutung, dass das Ergebnis im Idealfall nicht oder zumindest nur in geringem Umfang von groben Fehlern in den Eingangsdaten beeinflusst wird,
- zudem muss der Einfluss der zufälligen Abweichungen durch die aufgestellte Varianz-Kovarianzmatrix zutreffend beschrieben sein.

Erst wenn diese Punkte erfüllt sind, machen die Angaben zur Genauigkeit Sinn, da es ansonsten passieren kann, dass z.B. unentdeckte grobe Fehler das Ergebnis beeinflussen können. Die Qualität eines Ausgleichungsergebnisses ist daher untrennbar mit dem Begriff der Zuverlässigkeit verbunden. Dieser beschreibt die Kontrollmöglichkeiten, innerhalb der Ausgleichung

- grobe Fehler in den Beobachtungen zu lokalisieren,
- den Einfluss eventuell nicht erkannter grober Fehler auf die Parameter abzuschätzen,
- die gegenseitige Kontrolle von Beobachtungen abzuschätzen.

Da die Genauigkeitsmaße vornehmlich den Anwender oder Auftraggeber interessieren und die Zuverlässigkeitskriterien den Geodäten intern absichern, spricht man auch von äußeren und internen geodätischen Kriterien, siehe (Niemeyer 2008, S. 270 ff).

6.1 Genauigkeitskriterien

6.1.1 Lokale Genauigkeitsmaße

Ausgehend von der Kofaktorenmatrix \mathbf{Q}_{xx} der Unbekannten können für die Neupunkte punktbezogene Genauigkeitsmaße berechnet werden. Wenn ein beliebiger ausgeglichener Netzpunkt P_i die Koordinaten \hat{x}_i und \hat{y}_i in einem Lage-netz hat, können diese in einem Subvektor

$$\hat{\mathbf{x}}_i = \begin{bmatrix} \hat{x}_i \\ \hat{y}_i \end{bmatrix} \quad (30)$$

aus dem gesamten Parametervektor $\hat{\mathbf{x}}$ zusammengefasst werden.

Zu jedem Subvektor $\hat{\mathbf{x}}_i$ gehört eine entsprechende Submatrix

$$\mathbf{Q}_{xx,i} = \begin{bmatrix} q_{x_i x_i} & q_{x_i y_i} \\ q_{y_i x_i} & q_{y_i y_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{xx} & q_{xy} \\ q_{yx} & q_{yy} \end{bmatrix}_i \quad (31)$$

als Ausschnitt aus der Kofaktorenmatrix \mathbf{Q}_{xx} . Aus den Diagonalelementen dieser Submatrix lassen sich für die Koordinatenunbekannten die Standardabweichungen

$$s_{x_i} = s_0 \sqrt{q_{x_i x_i}} \quad , \quad s_{y_i} = s_0 \sqrt{q_{y_i y_i}} \quad (32)$$

angeben. Es ist jedoch zu beachten, dass diese Standardabweichungen von der jeweiligen Lage des Netzes im Koordinatensystem abhängen. Als skalares Maß zur Beurteilung der Punktgenauigkeit kann man aus (32) mit

$$s_{P_i}^H = \sqrt{s_{x_i}^2 + s_{y_i}^2} \quad (33)$$

den mittleren Punktfehler angeben, der auch als *Helmertscher Punktfehler* bezeichnet wird. Als weiteres skalares Maß kann der *Werkmeistersche Punktfehler*

$$s_{P_i}^W = \sqrt{s_{x_i}^2 \cdot s_{y_i}^2 - s_{x_i y_i}^2} \quad (34)$$

angegeben werden, siehe z.B. (Niemeier 2008, S. 279). Aus (31) lässt sich ein weiteres Genauigkeitsmaß ableiten, nämlich die *Helmertsche Fehlerellipse* mit

$$A_F^2 = \frac{1}{2} s_0^2 (q_{xx} + q_{yy} + \omega) \quad , \quad (35)$$

$$B_F^2 = \frac{1}{2} s_0^2 (q_{xx} + q_{yy} - \omega) \quad , \quad (36)$$

$$\Theta_F = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{2q_{xy}}{q_{xx} - q_{yy}} \right) \quad (37)$$

und der Hilfsgröße

$$\omega^2 = (q_{xx} - q_{yy})^2 + 4q_{xy}^2 \quad . \quad (38)$$

Mit A_F bzw. B_F sind die große bzw. die kleine Halbachse bezeichnet, Θ_F bezeichnet den Richtungswinkel der großen Halbachse. Die Wahrscheinlichkeit, dass die wahre Punktlage innerhalb dieser Fehlerellipse liegt, hängt vom Netzfreiheitsgrad ab und beträgt zwischen 29% und 39%, siehe Niemeier (2008, S. 278 ff.). Möchte man diese Wahrscheinlichkeit auf einen vorgegebenen Wert, z.B. $P = (1 - \alpha) = 95\%$ bringen, sind die Achsen der Fehlerellipse zu vergrößern, so dass man die so genannte *Konfidenzellipse* erhält. Wurden die Achsen unter Verwendung des Schätzwertes für den Varianzfaktor s_0^2 berechnet, so sind diese mit dem Quantil $F_{f_1, f_2, 1-\alpha}$ der F -Verteilung zu multiplizieren. Der Wert f_1 bezeichnet den ersten Freiheitsgrad, der mit $f_1 = 2$ zu wählen ist, der Freiheitsgrad f_2 entspricht der Redundanz des Ausgleichsproblems. Mit α ist die Irrtumswahrscheinlichkeit bezeichnet. Damit ergeben sich die Achsen der Konfidenzellipse nach (Niemeier 2008, S. 277) zu

$$A_K^2 = 2 \cdot F_{2, f, 1-\alpha} \cdot A_F^2 \quad , \quad (39)$$

$$B_K^2 = 2 \cdot F_{2, f, 1-\alpha} \cdot B_F^2 \quad , \quad (40)$$

$$\Theta_K = \Theta_F \quad . \quad (41)$$

Diese Genauigkeitskriterien, die sich auf einen Punkt und dessen Koordinaten beziehen, werden *lokale Genauigkeitskriterien* genannt.

6.1.2 Globale Genauigkeitsmaße

Werden Genauigkeitsmaße aus der gesamten Kofaktorenmatrix \mathbf{Q}_{xx} abgeleitet, spricht man von *globalen Genauigkeitsmaßen*. Diese Maße werden insbesondere bei der Netzplanung und -optimierung eingesetzt, um z.B. eine bestimmte Form und Größe der Fehlerellipsen zu erreichen. In Anlehnung an die Konfidenzellipse im zweidimensionalen Fall wird ein u -dimensionales *Konfidenzhyperellipsoid* betrachtet. Die gewünschten Eigenschaften eines Netzes führen dann zu Forderungen, die von den Halbachsen des Hyperellipsoids zu erfüllen sind. In Analogie zum Helmertschen Punktfehler kann z.B. gefordert werden, dass die Summe der Achslängen dieses Hyperellipsoids minimal wird. Eine Analogie zum Werkmeisterschen Punktfehler besteht in der Forderung nach einem minimalen Volumen des Hyperellipsoids. Die Forderung nach einem möglichst isotropen Netz, d.h. kreisrunde Fehlerellipsen, führt zu der Forderung nach gleich großen Halbachsen des Hyperellipsoids. Eine ausführliche Vorstellung der globalen Genauigkeitsmaße ist in (Niemeier 2008, S. 282) zu finden.

6.2 Zuverlässigkeitskriterien

6.2.1 Redundanzanteile der Beobachtungen

Die Ableitung von Zuverlässigkeitsmaßen steht im engen Zusammenhang mit den Redundanzanteilen der Beobachtungen. Zur Ableitung dieser Größen werden die Ergebnisse der Ausgleichung im Gauß-Markov-Modell, siehe Abschnitt 4.2.2.3, betrachtet. Multipliziert man die Kofaktorenmatrix der Verbesserungen \mathbf{Q}_{vv} in (26) von rechts mit \mathbf{P} ergibt sich

$$\mathbf{Q}_{vv}\mathbf{P} = \mathbf{E} - \mathbf{A}\mathbf{Q}_{xx}\mathbf{A}^T\mathbf{P} \quad . \quad (42)$$

Setzt man diesen Ausdruck in (24) ein erhält man

$$\mathbf{v} = -\mathbf{Q}_{vv}\mathbf{P}\mathbf{l} \quad . \quad (43)$$

Setzt man

$$\mathbf{Q}_{vv}\mathbf{P} = \mathbf{R} \quad , \quad (44)$$

erhält man für die Verbesserungen bei differentiellen Änderungen

$$\Delta\mathbf{v} = -\mathbf{R}\Delta\mathbf{l} \quad . \quad (45)$$

Geht man davon aus, dass $\Delta\mathbf{l}$ nur einen Fehler ∇l_i beinhaltet, so wird dieser durch die Multiplikation mit \mathbf{R} auf alle Verbesserungen übertragen. Von besonderem Interesse ist die Auswirkung eines Fehlers ∇l_i auf die korrespondierende Verbesserung v_i . Mit der Beschränkung auf den Fall, dass nur ein Beobachtungsfehler vorhanden ist, gelangt man über

$$\nabla v_i = -(\mathbf{R})_{ii} \nabla l_i = -r_i \nabla l_i \quad (46)$$

zu dem von (Förstner 1979) eingeführten Begriff des *Redundanzanteils* r_i , der das i -te Diagonalelement der Matrix \mathbf{R} ist.

Der Redundanzanteil stellt damit einen Übertragungsfaktor dar, der angibt, wie stark ein Beobachtungsfehler auf die korrespondierende Verbesserung übertragen wird. Um Ausreißer im Beobachtungsmaterial erkennen zu können, sind folglich hohe Redundanzanteile erforderlich.

Im Extremfall kann ein Redundanzanteil den Wert $r_i = 1$ annehmen, d.h., dass sich ein Beobachtungsfehler vollständig in der Verbesserung zeigt. Dies ist der Fall, wenn eine Strecke zwischen zwei Festpunkten beobachtet wird. Im anderen Extremfall, $r_i = 0$, zeigt sich ein Beobachtungsfehler nicht in den Verbesserungen und kann daher nicht lokalisiert werden. Dies ist der Fall, wenn ein Neupunkt nur durch einfaches polares Anhängen bestimmt ist. In der Praxis wird der Redundanzanteil als Maß für die Kontrolliertheit einer Beobachtung in Prozent angegeben und als EV_i -Wert (Einfluss auf die Verbesserung)

$$EV_i = r_i \cdot 100\% \quad (47)$$

in den Berechnungsprotokollen ausgegeben. Die Summe aller Redundanzanteile

$$\sum_{i=1}^n r_i = \text{spur}(\mathbf{Q}_{vv} \mathbf{P}) = r \quad (48)$$

ergibt die Gesamtredundanz des Ausgleichungsproblems, siehe (Förstner 1979). Die Forderung nach möglichst hohen Redundanzanteilen steht in Konkurrenz zu Wirtschaftlichkeitsüberlegungen. In der Praxis hat sich daher folgendes Bewertungsschema für die Beurteilung von Beobachtungen durchgesetzt:

| | | | |
|-----|------|--------|---|
| 0% | ≤ EV | < 1% | nicht kontrolliert |
| 1% | ≤ EV | < 10% | schlecht kontrolliert |
| 10% | ≤ EV | < 30% | ausreichend kontrolliert |
| 30% | ≤ EV | < 70% | gut kontrolliert |
| 70% | ≤ EV | < 100% | Beobachtung kann ohne Verlust an Zuverlässigkeit entfallen |

Zur ersten Beurteilung von Ausgleichungsaufgaben kann mit

$$\bar{r}_i = 1 - \frac{u}{n} \quad (49)$$

der mittlere Redundanzanteil einer Beobachtung abgeschätzt werden, siehe (Niemeier 2008, S. 293). Betrachtet man das Beispiel eines beidseitig in Lage und Richtung angeschlossenen Polygonzugs mit fünf Neupunkten, erhält man mit $n = 20$ Beobachtungen und $u = 17$ Unbekannten für den mittleren Redundanzanteil den Wert $\bar{r}_i = 15\%$, was bereits vor Beginn der Messungen auf eine schlechte Kontrolliertheit der Beobachtungen hinweist. Mit Hilfe der Redundanzanteile lassen sich Kriterien für die innere und äußere Zuverlässigkeit ableiten, die in den Abschnitten 6.2.3 und 6.2.4 vorgestellt werden.

6.2.2 Ausreißersuche

Das folgende Konzept für die Lokalisierung von Ausreißern wurde von (Baarda 1968) entwickelt und als „Data Snooping“ bezeichnet.

6.2.2.1 Globaltest

Im ersten Schritt, der als *Globaltest* bezeichnet wird, erfolgt eine Untersuchung des Ausgleichsergebnisses dahingehend, ob die Standardabweichung der Gewichtseinheit nach der Ausgleichung (a posteriori)

$$s_0 = \sqrt{\frac{\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}}{f}} \quad (50)$$

mit dem vor der Ausgleichung (a priori) vorgegebenen Wert der theoretischen Standardabweichung σ_0 übereinstimmt. Diese Beurteilung erfolgt mit Hilfe eines χ^2 -Tests, dessen Ablauf in Tab. 1 dargestellt ist. Kann die Nullhypothese, dass sich beide Werte nur zufällig unterscheiden, nicht angenommen werden, können folgende Ursachen dafür verantwortlich sein:

- Das funktionale Modell ist unvollständig.
- Das stochastische Modell wurde unzutreffend gewählt, z.B. durch die Festlegung zu optimistischer Genauigkeiten.
- Das Beobachtungsmaterial enthält grobe Fehler.

Bevor aber das funktionale und das stochastische Modell angezweifelt werden, ist sicherzustellen, dass das Beobachtungsmaterial frei von groben Fehlern ist.

6.2.2.2 Lokaltest

Hat der Globaltest ergeben, dass s_0 signifikant größer ist als σ_0 , ist im nächsten Schritt eine Analyse der einzelnen Beobachtungen durchzuführen, was als *Lokaltest* bezeichnet wird. Es stellt sich die Frage, welche Beobachtungen als Ausreißer identifiziert werden können. Ausgangspunkt für die Ausreißersuche ist die Überlegung, dass ein grober Fehler in der Beobachtung l_i hauptsächlich die korrespondierende Verbesserung v_i beeinflussen wird. Daher verwendet man als Testgröße die Normierte Verbesserung

$$NV_i = \frac{v_i}{\sigma_{v_i}} = \frac{v_i}{\sigma_0 \cdot \sqrt{(q_{vv})_{ii}}} \quad (51)$$

Mit σ_0 ist die theoretische Standardabweichung und mit q_{vv_i} das i -te Diagonalelement der Kofaktorenmatrix der Verbesserungen bezeichnet. Zu beachten ist hier die Verwendung von σ_0 anstelle von s_0 , da dieser Wert durch einen eventuellen groben Fehler verfälscht sein könnte.

Baarda (1968) hat gezeigt, dass die NV_i der standardisierten Normalverteilung mit $N(0, 1)$ folgen, wenn keine Ausreißer in den Beobachtungen vorhanden sind. Ein Ausreißer liegt somit vor, wenn der Wert $|NV_i|$ größer ist als der aus der standardisierten Normalverteilung abzuleitende Grenzwert. Dieser beträgt für $\alpha = 0,1\%$ bei zweiseitiger Fragestellung $y_{1-\alpha/2} = 3,29$.

Da bei n Beobachtungen folglich n Einzeltests durchzuführen sind, ist die Irrtumswahrscheinlichkeit dieser Tests darauf abzustimmen, damit sich im Lokaltest Ausreißer zeigen, wenn zuvor die Nullhypothese des Globaltests verworfen wurde. Die Abstimmung des Testniveaus wird in (Niemeier 2008, S. 302 ff.) beschrieben.

In der Praxis erfolgt die Beurteilung der normierten Verbesserungen oftmals nach folgendem Bewertungsschema:

| | |
|-------------------------|-----------------------------------|
| $ NV_i < 2,5$ | Kein grober Fehler erkennbar |
| $2,5 \leq NV_i < 4,0$ | Grober Fehler möglich |
| $4,0 \leq NV_i $ | Grober Fehler sehr wahrscheinlich |

6.2.3 Innere Zuverlässigkeit

Um grobe Fehler aufzudecken, kann zunächst mit Hilfe von (46) die Größe eines etwaigen Groben Fehlers

$$GF_i = \nabla l_i = \frac{-v_i}{r_i} \quad , \quad (52)$$

abgeschätzt werden. Es ist sofort ersichtlich, dass geringe Redundanzteile r_i zu großen Werten GF_i führen.

Um beantworten zu können, wie gut die innere Zuverlässigkeit z.B. eines geodätischen Netzes ist, kann für jede Beobachtung untersucht werden, wie groß ein Fehler sein muss, damit er zum Verwerfen des Tests führt. Dazu ist erforderlich, den Einfluss eines groben Fehlers auf die normierte Verbesserung abzuschätzen.

Setzt man (46) in (51) ein, erhält man den Ausdruck

$$\nabla NV_i = \frac{|\nabla v_i|}{\sigma_{l_i} \cdot \sqrt{r_i}} = \frac{r_i \cdot \nabla l_i}{\sigma_{l_i} \cdot \sqrt{r_i}} = \frac{\nabla l_i \cdot \sqrt{r_i}}{\sigma_{l_i}} = \frac{GF_i \cdot \sqrt{r_i}}{\sigma_{l_i}} . \quad (53)$$

Die NV_i folgen der standardisierten Normalverteilung mit $N(0, 1)$, wenn keine Ausreißer in den Beobachtungen vorhanden sind. Liegt ein Ausreißer vor, folgen sie der nichtzentralen Normalverteilung mit $N(\delta_0, 1)$, wobei mit δ_0 der Nichtzentralitätsparameter bezeichnet ist. Die Null- und die Alternativhypothese für einen statistischen Test auf einen groben Fehler ∇l_i lauten somit

$$\begin{aligned} H_0 : E\{\nabla l_i\} &= 0 , \\ H_A : E\{\nabla l_i\} &= \nabla l_i . \end{aligned} \quad (54)$$

Die Nullhypothese kann angenommen werden, wenn die normierten Verbesserungen mit $NV_i \sim N(0, 1)$ der standardisierten Normalverteilung folgen, die Nullhypothese wird zugunsten der Alternativhypothese verworfen, wenn die NV_i mit $NV_i \sim N(\delta_0, 1)$ der nichtzentralen Normalverteilung folgen. Wie weit Null- und Alternativhypothese auseinander liegen, wird durch δ_0 bestimmt.

Für eine Irrtumswahrscheinlichkeit von $\alpha = 0,1\%$ bei zweiseitiger Fragestellung und einer Testgüte von $1-\beta$ mit $\beta = 20\%$ bei einseitiger Fragestellung erhält man aus der standardisierten Normalverteilung $y_{1-\alpha/2} = 3,29$ und $y_{1-\beta} = 0,84$. Somit muss NV_i mindestens

$$\nabla_0 NV_i = \delta_0 = 3,29 + 0,84 = 4,13 \quad (55)$$

sein. Aus (53) folgt für den unteren Grenzwert

$$\nabla_0 NV_i = \delta_0 = \frac{\nabla_0 l_i \cdot \sqrt{r_i}}{\sigma_{l_i}} . \quad (56)$$

Stellt man diesen Ausdruck um, ergibt sich der **GrenZWert** für nicht erkennbare Fehler

$$GRZW_i = \nabla_0 l_i = \frac{\delta_0 \cdot \sigma_{l_i}}{\sqrt{r_i}} = \frac{\delta_0 \cdot \sigma_0}{\sqrt{r_i \cdot p_i}} . \quad (57)$$

Dieser Wert kann für jede Beobachtung bei Vorgabe der Irrtumswahrscheinlichkeit α und der Testgüte $1-\beta$ für δ_0 berechnet werden und gibt Auskunft darüber, ab welcher Größenordnung grobe Fehler überhaupt aufgedeckt werden können. Ein grober Fehler unter dem Grenzwertfehler gilt als zufällig und bleibt somit unentdeckt. Neben den Werten α und β erkennt man aus (57) sofort die Einflussgrößen für die $GRZW_i$:

- Standardabweichungen der Beobachtungen,
- Redundanzanteile der Beobachtungen und somit die Netzgeometrie.

6.2.4 Äußere Zuverlässigkeit

Die äußere Genauigkeit beschreibt den Einfluss von Beobachtungsfehlern auf die gesuchten Parameter und Funktionen von diesen. Von hoher äußerer Zuverlässigkeit kann gesprochen werden, wenn nicht lokalisierte oder nicht lokalisierbare grobe Fehler in den Beobachtungen die gesuchten Parameter möglichst wenig beeinflussen. Die Beurteilung der äußeren Zuverlässigkeit besitzt somit oftmals eine größere Bedeutung als die Beurteilung der inneren Genauigkeit.

Betrachtet man ausgehend von (22) den Einfluss differentieller Änderungen im Beobachtungsvektor, erhält man

$$\Delta \mathbf{x} = \mathbf{Q}_{xx} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \Delta \mathbf{l} \quad . \quad (58)$$

Betrachtet man den Fall, dass $\Delta \mathbf{l}$ nur einen Fehler ∇l_i beinhaltet, so wird dieser durch die Multiplikation mit $\mathbf{Q}_{xx} \mathbf{A}^T \mathbf{P}$ auf alle Parameter übertragen. Es kann aber davon ausgegangen werden, dass sich der Haupteinfluss auf den Anfangs- und Endpunkt der Messung auswirkt. Sicher bestimmte Punkte werden dabei eine geringere Koordinatenveränderung aufweisen als schlecht bestimmte. Verwendet man nun für ∇l_i das Maß für die innere Zuverlässigkeit $\nabla_0 l_i$ erhält man aus (58) mit

$$\nabla_0 \mathbf{x}_i = \mathbf{Q}_{xx} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \nabla_0 \mathbf{l}_i \quad (59)$$

ein Maß für die äußere Zuverlässigkeit, das jedoch datumsabhängig ist. Überträgt man die Auswirkung mit Hilfe des Varianz-Fortpflanzungsgesetzes auf die entsprechende Strecke erhält man

$$\Delta \mathbf{s} = \mathbf{A} \mathbf{Q}_{xx} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \Delta \mathbf{l} \quad . \quad (60)$$

Setzt man (42) und (44) ein, ergibt sich

$$\Delta \mathbf{s} = (\mathbf{E} - \mathbf{R}) \Delta \mathbf{l} \quad . \quad (61)$$

Durch die Annahme, dass $\Delta \mathbf{l}$ nur einen Fehler ∇l_i beinhaltet, gilt

$$\nabla s_i = (1 - r_i) \nabla l_i \quad (62)$$

für die i -te Messung und unter Verwendung von $\nabla_0 l_i = GRZW_i$ der Ausdruck

$$EGK_i = (1 - r_i) GRZW_i \quad , \quad (63)$$

wobei EGK den Einfluss des Grenzwertes auf die **K**oordinaten der berührenden Punkte bezeichnet. Berechnet man die äußere Zuverlässigkeit aus dem Wert GF (52), erhält man für den Einfluss eines eventuellen groben Fehlers auf den die Messung berührenden **P**unkt

$$EP_i = (1 - r_i) GF_i \quad . \quad (64)$$

Liegt als vermutlich grob falsche Messung eine Richtungsbeobachtung vor, ist das Winkelmaß in eine Querabweichung umzurechnen. Zudem ist der Redundanzanteil um den an andere Parameter, z.B. Orientierungsunbekannte, abfließenden Anteil zu vermindern.

6.3 Praktische Handhabung der Qualitätskriterien

Da sich ein Beobachtungsfehler auch auf die nicht mit dieser Beobachtung korrespondierenden Verbesserungen auswirkt, werden beim Vorhandensein eines Ausreißers i.d.R. mehrere Werte $|NV_i|$ den Grenzwert überschreiten. Daher ist immer nur die Beobachtung mit dem größten Betrag von NV_i aus dem Beobachtungsmaterial zu entfernen. Anschließend ist die Ausgleichung mit $n - 1$ Beobachtungen erneut durchzuführen. Diese sukzessive Untersuchung und Elimination einzelner Beobachtungen wird so lange fortgesetzt, bis sich keine Ausreißer im Beobachtungsmaterial mehr zeigen. Für die praktische Handhabung der Qualitätskriterien der Genauigkeit und Zuverlässigkeit kann folgendes Schema verwendet werden. Zunächst ist eine zu erreichende Genauigkeit vorzugeben, z.B. in Form eines Helmertschen Punktfehlers oder durch Vorgabe der Halbachsen von Fehler- oder Konfidenzellipsen. Des Weiteren ist ein Schrankenwert c zu wählen, bis zu dessen Erreichen eine normierte Verbesserung akzeptiert wird.

- alle Werte $EV > 30\%$, alle Werte $|NV| < c$, alle Werte $|EP| < \sigma_p$
Das Ergebnis erfüllt die Anforderungen bezüglich der Genauigkeit und Zuverlässigkeit.
- alle Werte $EV > 30\%$, ein Wert $|NV| > c$, alle Werte $|EP| < \sigma_p$
In einer Beobachtung liegt vermutlich ein Ausreißer vor. Da dieser aber nur einen geringen Einfluss auf den die Messung berührenden Punkt hat, kann diese Beobachtung in den Eingangsdaten verbleiben.
- alle Werte $EV > 30\%$, ein Wert $|NV| > c$, ein Wert $|EP| > \sigma_p$
In einer Beobachtung liegt vermutlich ein Ausreißer vor, dessen Einfluss auf den die Messung berührenden Punkt nicht tolerierbar ist. Die entsprechende Beobachtung ist aus dem Beobachtungsvektor zu streichen.
- *Ein Wert $EV < 10\%$* , alle Werte $|NV| < c$, alle Werte $|EP| < \sigma_p$
Obwohl alle normierten Verbesserungen und alle mittleren Punktfehler unterhalb der festgelegten Schrankenwerte liegen, kann ein Ausreißer in der Beobachtung mit $EV < 10\%$ nicht ausgeschlossen werden, da der Redundanzanteil sehr gering ist. Abhilfe kann in diesem Fall nur durch die Einführung zusätzlicher Beobachtungen oder durch die Steigerung der Genauigkeit von Nachbarmessungen geschaffen werden.

Da die Ausgleichung nach kleinsten Quadraten auf das engste mit der Annahme lediglich zufälliger Abweichungen der Beobachtungen verknüpft ist, beeinflussen Ausreißer das Ergebnis für die gesuchten Parameter in erheblichem Umfang. Dadurch ist die Leistungsfähigkeit der Ausreißersuche stark begrenzt. Praktische Erfahrungen haben gezeigt, dass die hier vorgestellte Ausreißersuche lediglich ca. 5% fehlerhafter Beobachtungen an der Gesamtanzahl der Beobachtung verkräftet. Dieser Wert ist keine feste Größe, sondern er variiert je nach der Geometrie und der Redundanz des Ausgleichungsproblems. Um tatsächlich die Güte der Beobachtungen zu überprüfen, ist z.B. bei der Verdichtung eines Festpunktfeldes folgendes Ablaufschema zu wählen:

1. Freie Netzausgleichung, um den Einfluss von Netzspannungen auf die Analyse der Beobachtungen auszuschließen.
2. Ausgleichung mit stochastischen Anschlusspunkten. Hierbei werden die Anschlusspunkte als Beobachtungen eingeführt, die mit den vorgestellten Konzepten untersucht werden können.
3. Ausgleichung mit festen Anschlusspunkten. Da diese Ausgleichung das Endprodukt darstellt, muss hierbei eine eingehende Analyse der Zuverlässigkeit erfolgen.

6.4 Weitere Möglichkeiten der Qualitätsbeurteilung

6.4.1 Untersuchung auf systematische Abweichungen

Die bisherigen Ausführungen bezogen sich auf die Erkennung von groben Fehlern in den Beobachtungen. Im Folgenden soll kurz die Erkennung systematischer Fehlereinflüsse mit Hilfe der Untersuchungen der Verbesserungen der Beobachtungen aufgezeigt werden, was als *Residuenanalyse* bezeichnet wird. Zu der Frage, ob sich systematische Abweichungen immer in den Residuen erkennen lassen, wird in (Helmert 1924) ausgeführt, dass diese die Residuen ändern können, jedoch nicht ändern müssen. Ausgehend davon, dass die Residuen sich von denen unterscheiden können, die sich in Abwesenheit von groben Fehlern ergeben, kann jedoch die Verteilung der Residuen überprüft werden.

In einer ersten Untersuchung kann geprüft werden, ob die Verteilung der Residuen ein „gerades Gesetz“ befolgt. Dafür sollen die gemessenen Größen laut (Helmert 1924) gleichartig oder gleichsinnig angeordnet werden. Dies kann z.B. dadurch erfolgen, dass man die Streckenbeobachtungen mit einem bestimmten Instrument in einer Liste zusammenstellt und die entsprechenden Residuen betrachtet. Der Erwartungswert für die Vorzeichensumme bei rein zufälligen Abweichungen ist Null mit einer Standardabweichung von \sqrt{n} , wobei mit n die Anzahl der zu untersuchenden Beobachtungen bezeichnet ist. Ist der Betrag der Vorzeichensumme s größer als \sqrt{n} , hat man ein erstes Anzeichen, systematische Einflüsse zu vermuten.

Mit dieser Untersuchung kann der Nachweis systematischer Einflüsse erbracht werden, über die Art der systematischen Abweichung lassen sich jedoch i.d.R. keine Rückschlüsse ziehen. An dieser Stelle ist der Sachverstand des Ingenieurs gefragt, der in diesem Fall die gesamte Prozesskette von der Aufbereitung der Messwerte bis zur Modellbildung überprüfen muss.

6.4.2 Varianzen von Beobachtungsgruppen

Kann angenommen werden, dass aufgrund der Voruntersuchungen keine groben Fehler und keine systematischen Abweichungen mehr vorhanden sind, kann das stochastische Modell erneut überprüft werden. Ergibt der Globaltest, siehe Abschnitt 6.2.2.1, dass die Standardabweichung der Gewichtseinheit nach der Ausgleichung s_0 mit dem vor der Ausgleichung vorgegebenen Wert σ_0 übereinstimmt, so ist dies noch keine Gewähr dafür, dass die Genauigkeitsrelationen der Beobachtungsgruppen untereinander zutreffend abgeschätzt wurden.

Die Varianz einer Beobachtungsgruppe i kann mit

$$s_{0_i} = \frac{\mathbf{v}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{v}_i}{r_{g_i}} \quad (65)$$

angegeben werden. Im Vektor \mathbf{v}_i sind die Verbesserungen der jeweiligen Beobachtungsgruppe zusammengefasst, \mathbf{P}_i enthält die entsprechenden Gewichte. Die Redundanz der Beobachtungsgruppe kann mit

$$r_{g_i} = \sum_{j=1}^{n_i} r_{j_i} \quad (66)$$

aus den Redundanzanteilen der einzelnen Beobachtungen berechnet werden. Erhält man aus (65) z.B. den Wert $s_{0, \text{Strecke}} = 0,7$ für die Streckenmessungen und $s_{0, \text{Richtung}} = 1,4$ für die Horizontalrichtungen, so ist dies ein Zeichen dafür, dass das Genauigkeitsverhältnis der Beobachtungsgruppen bei der Aufstellung des stochastischen Modells nicht zutreffend gewählt wurde. Diese Relation kann durch eine *Varianzkomponentenschätzung* angepasst werden, so dass $s_{0, \text{Strecke}} = 1,0$ und $s_{0, \text{Richtung}} = 1,0$ resultiert. Die Ableitung der entsprechenden Formeln ist z.B. in (Niemeier 2008, S. 318 ff.) zu finden. Es ist jedoch unbedingt zu beachten, dass eine Varianzkomponentenschätzung erst dann durchgeführt werden darf, wenn die Beobachtungen frei von groben Fehlern und systematischen Abweichungen sind. Ansonsten werden die Auswirkungen dieser Fehler und Abweichungen durch ein unrealistisches stochastisches Modell aufgefangen.

7 Schlussbetrachtung

In der aktuellen Norm EN ISO 9000:2005 wird der Begriff Qualität wie folgt definiert: „Die Qualität ist der Grad, in dem ein Satz inhärenter Merkmale Anforderungen erfüllt“. Mit „inhärent“ werden dabei die einer Sache oder Dienstleistung „innewohnenden“ Eigenschaften bezeichnet, die objektiv messbar sind. Die „Anforderungen“, die es zu erfüllen gilt, werden von außen, z.B. von einem Auftraggeber, an den Produzenten einer Sache oder den Anbieter einer Dienstleistung herangetragen.

Die inhärenten Merkmale, die die Dienstleistung des Geodäten erfüllen muss, sind die Genauigkeit und die Zuverlässigkeit der aus Messungen abgeleiteten Parameter. Um verlässliche Aussagen zu diesen beiden Zielgrößen machen zu

können, werden mehr Messdaten erhoben, als zur eindeutigen Bestimmung der gesuchten Parameter erforderlich ist. Die Datenauswertung erfolgt in diesem Fall mit Hilfe einer Ausgleichung nach kleinsten Quadraten.

In diesem Beitrag wurden die gängigen Qualitätskriterien aufgezeigt, die sich seit Ende der 1960er Jahre in der Datenauswertung etabliert haben, um die Genauigkeit und insbesondere die Zuverlässigkeit anhand der Ergebnisse einer Ausgleichung nach kleinsten Quadraten beurteilen zu können. Diese Kenngrößen werden heutzutage von allen kommerziellen Programmen zur Netzausgleichung in den Protokollen ausgegeben. Im Zuge einer durchgängigen Qualitätssicherung ist es jedoch ratsam, die gesamte Prozesskette von der Messung im Felde bis zum Ausgleichungsergebnis ein wenig näher zu beleuchten. Folgenden Punkten muss Beachtung geschenkt werden.

Datenaufbereitung: Es ist sicher zu stellen, dass aktuelle Kalibrierparameter berücksichtigt werden, um die Geräteablesungen zu korrigieren. Zudem müssen äußere Einflüsse mit ausreichender Genauigkeit erfasst und entsprechende Korrekturen angebracht werden. Danach ist eine sachgerechte Reduktion der Messwerte in die Rechenfläche vorzunehmen.

Modellbildung: Hierbei muss gewährleistet werden, dass ein möglichst vollständiger funktionaler Zusammenhang zwischen dem Beobachtungsvektor und den gesuchten Parametern aufgestellt wird und dass ein für alle Beobachtungstypen zutreffendes stochastisches Modell aufgestellt wird. Bezüglich des funktionalen Modells ist beim Einsatz von Softwareprodukten darauf zu achten, welche Parameter in den Voreinstellungen gesetzt sind. So ist es z.B. bei vielen Programmen möglich, die Reduktionen auf die Rechenfläche seitens des funktionalen Modells zu berücksichtigen. Des Weiteren können sogar atmosphärische Korrekturen, Additionskonstanten und Maßstabsfaktoren seitens des funktionalen Modells berücksichtigt werden. Es ist somit von entscheidender Wichtigkeit, zu prüfen, dass die „Schalter“ so gesetzt sind, dass der Vorverarbeitungsstand der Messwerte auf ein sachgerechtes funktionales Modell trifft. Ebenso muss man sich mit den Möglichkeiten der Aufstellung des stochastischen Modells in den Programmen vertraut machen, um festzustellen, wie globale, standpunktbezogene oder individuelle Genauigkeiten für die Beobachtungen festgelegt werden können.

Auswertung: Beim Einsatz von Programmen ist sicher zu stellen, dass bei nicht-linearen Ausgleichungsproblemen eine iterative Lösung erfolgt und es ist zu prüfen, welche Abbruchschranke für die Iteration vorgesehen ist. Bei Program-

men zur Formenerkennung, die eine Ausgleichung im Gauß-Helmert-Modell durchführen, ist zu prüfen, ob die Linearisierung und Iteration sachgerecht implementiert wurde, da ansonsten insbesondere bei größeren Residuen unbrauchbare Werte für die gesuchten Parameter resultieren können.

Bei der *Qualitätsbeurteilung* muss die Bedeutung der im Protokoll angegebenen Parameter für die Genauigkeit und Zuverlässigkeit richtig interpretiert werden. Oftmals wird der Anwender durch Hinweise, z.B. Kommentare oder Sternchen, hinter kritischen Werten unterstützt.

Im Rahmen dieser Prozesskette nimmt die Ausgleichungsrechnung die zentrale Rolle ein, denn nur mit ihrer Hilfe ist es möglich

- grobe Fehler mit Hilfe statistischer Tests zu lokalisieren,
- Genauigkeitsaussagen für die gesuchten Parameter abzuleiten, die
- mit Angaben zur Zuverlässigkeit versehen werden können.

Die Ausgleichungsrechnung ist somit ein *Qualitätssicherungsverfahren* für geodätische Arbeiten. Unter gleichzeitiger Verwendung aller Beobachtungen wird ein eindeutiges und nachvollziehbares Ergebnis erzeugt, dessen Eigenschaften mit objektiven Kriterien beurteilt werden kann. Die vom Geodäten mit Hilfe der Ausgleichungsrechnung erzeugten Ergebnisse werden auch zukünftigen Definitionen des Begriffs „Qualität“ standhalten können.

Literatur

- Baarda W (1968): A testing procedure for use in geodetic networks. Publications on Geodesy, Netherlands Geodetic Commission, Vol. 2, No. 5.
- Carosio A (1979): Robuste Ausgleichung. Vermessung Photogrammetrie Kulturtechnik 77: 293-297.
- Caspary W (1988): Fehlerverteilungen, Methode der kleinsten Quadrate und robuste Alternativen. ZfV 113: 123-133.
- Förstner W (1979): Das Programm TRINA zur Ausgleichung und Gütebeurteilung geodätischer Lagenetze. ZfV 104:61-72.
- Gauß CF (1887): Abhandlungen zur Methode der kleinsten Quadrate. Physica-Verlag Würzburg, Neudruck 1964.
- Gauß CF (1900): Carl Friedrich Gauß Werke Achter Band, Herausgegeben von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen in Commission bei B.G. Teubner in Leipzig, 1900.

- Golub GH, van Loan C (1980): An Analysis of the Total Least-Squares Problem. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, Volume 17 Issue 6, pp. 883-893.
- Hampel F (2001): Robust statistics: a brief introduction and overview. In: *First International Symposium on Robust Statistics and Fuzzy Techniques in Geodesy and GIS*. A. Carosio, H. Kutterer (editors), Swiss Federal Institute of Technology Zurich (ETH), Institute of Geodesy and Photogrammetry, IGP-Bericht Nr. 295, S. 13-17.
- Hekimoglu S, Koch KR (1999): How can reliability of the robust methods be measured. *Proceedings of the Third Turkish-German Joint Geodetic Days*, Istanbul, pp. 179-196.
- Helmert FR (1924): *Die Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate*. 3. Auflage, Teubner Verlag, Leipzig.
- Jäger R, Müller T, Saler H, Schwäble R (2005): *Klassische und robuste Ausgleichungsverfahren*. Herbert Wichmann Verlag, Heidelberg.
- Lenzmann L, Lenzmann E (2004): Strenge Auswertung des nichtlinearen Gauß-Helmert-Modells. *AVN 111*: 68-73.
- Linnik JW (1961): *Methode der kleinsten Quadrate in moderner Darstellung*.
- Neitzel F, Petrovic S (2008): Total Least Squares (TLS) im Kontext der Ausgleichung nach kleinsten Quadraten am Beispiel der ausgleichenden Geraden. *ZfV 133*:141-148.
- Niemeier W (2008): *Ausgleichsrechnung*. Walter de Gruyter, Berlin, New York.
- Petrovic S (2003): *Parameterschätzung für unvollständige funktionale Modelle in der Geodäsie*. Deutsche Geodätische Kommission, Reihe C, Nr. 563, München.
- Pope AJ (1972): Some Pitfalls to be Avoided in the Iterative Adjustment of Nonlinear Problems. *Proceedings of the 38th Annual Meeting of the American Society of Photogrammetry*, Washington, D.C., pp. 449-477.
- Schaffrin B (2007): Connecting the Dots: The Straight-Line Case Revisited. *ZfV 132*: 385-394.
- Welsch W (1975): Über die Sensitivitätsanalyse geodätischer Kontrollnetze. 1. *International Symposium on Deformation Measurements by Geodetic Methods*. Krakow, 22.-24.09.1975. FIG Commission 6 (Ed.): *Proceedings*, pp. 353-366.
- Welsch W, Heunecke O, Kuhlmann H (2000): Auswertung geodätischer Überwachungsmessungen. In: Möser M, Müller G, Schlemmer H, Werner H (Hrsg.), *Handbuch Ingenieurgeodäsie*, Herbert Wichmann Verlag, Heidelberg.